

PREDGOVOR

Ova zbirka je nastala zbog iskazane potrebe učenika koji su upućeni na popravni ispit, a koji su izjavili da „nemaju iz čega“ učiti, kao dodatak udžbeniku iz Tehničke mehanike i bilježnici, te materijalima objavljenim za vrijeme nastave na daljinu u datotekama predmeta u Teams-u. Također bi trebala poslužiti kao pomoć kolegama koji su se ponudili da će s učenicima dodatno raditi u VIII. mjesecu kako bi im pomogli savladati gradivo. Podsjećam da su učenici koji nemaju bilježnicu, ili imaju većim dijelom praznu, sami za to zaslužni. Radne navike i vještine koje su trebali steći samostalnim rješavanjem zadataka i pisanjem zadaća, nažalost nisu u predviđenom roku, pa sad imaju priliku to učiniti, ali u puno kraćem vremenu (što je objektivno teže). S obzirom na „nastavu na daljinu“, nije bilo pouzdano preporučiti bilježnicu nijednog učenika ove godine, već je bila preporučena jedna prošlogodišnja bilježnica, koju je izgleda netko već posudio, i onda „izgubio“ umjesto da je vrati.

Namjera ove zbirke nije bila objasniti pojmove, nego detaljno razraditi postupke rješavanja zadataka, i to onakvih kakvi se pojavljuju u kontrolnim radovima, odnosno ispitima. Zadaci su podijeljeni po poglavljima, kako bi se učenici mogli snalaziti u literaturi, odn. uspoređivati sa odgovarajućim sadržajima u knjizi i bilježnici. Stoga sadrži samo 21 zadatak. Uz svaki je ipak dodana u plavim poljima teorija na kojoj se temelji rješenje. Vjerujte, zadaci su lakši kad znate tu teoriju, i tada nećete učiti napamet određeni zadatak, što nema smisla, jer bilo kakva promjena zadanih podataka uzrokuje potpuni promašaj. Poželjno je riješiti što više zadataka, pa preporučujem i one riješene u knjizi, zadane za zadaću te stare kontrolne na internetskoj stranici škole: <http://ss-ios-pu.skole.hr/>, gdje trebate odabrat poveznicu „Razmjena znanja“, zatim „Kutak za učenike“ te „Tehnička mehanika“.

Uvijek su moguće greške, pa čitatelje koji ih pronađu molim da mi jave za ispravak na e-mail adresu: miroslav.kuzmic@skole.hr ili na chat u Teamsu.

Naravno da je sve sažeto, stalo je na samo 16 stranica! Tako da zbirka ni fizički, ni psihički, ne predstavlja previsoko „brdo“ koje se ne bi moglo osvojiti. Naprotiv, tvrdim da to svatko može savladati, ali samo upornim i marljivim radom. Možeš i ti! Reci sam sebi: „Ja to mogu, hoću, i idem sad odmah!“

Pripremite pribor za pisanje, dva (različita) trokuta i kalkulator, dobru volju i krenite. Zatim budite uporni, i ako radite redovito barem 2 tjedna, uspjeh neće izostati.

Sretno! Lijep pozdrav,

Pula, 1. kolovoz 2020.

Miroslav Kuzmić, mag. ing. mech.

Drugo izdanje ima ispravljene greške koje su se potkrale u prvom, npr. na prvoj stranici, oznaka za „deka“ je umjesto da bila pogrešno Da (Word je automatski ubacio veliko slovo u novom redu). Na 6. stranici u 4. zadatku sila F_2 treba imati negativan predznak. Na 9. stranici u 2. zadatku na slici je pogrešno bila upisana koordinata x težišta (umjesto x_T pisalo je y_T). Također je predgovor prebačen sa kraja dokumenta (gdje je bio pogovor) na početak.

Učenicima je dopušteno na ispitima imati svoju zbirku formula (šalabahter), koju trebaju sami izraditi na listu papira A4. Namjerno je nema ovdje u prilogu, jer je i prepisivanje i razmišljanje o tome koje su formule potrebne, a koje ne treba prepisati iz knjige ili bilježnice (ili pak iz ovog teksta), također način da se nešto nauči. Ako misli da ne bi znao pročitati neku formulu, učenik si može označiti crticama i dopisati objašnjenje. Npr.:

$$\mathbf{F} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a}$$

sila masa akceleracija

Iz dugogodišnjeg iskustva poznato mi je da sve više učenika ima problema s upotrebom trokuta, tj. ne zna mjeriti duljine ni kutove, crtati paralele i okomice. Savjetujem vježbanje ovih osnovnih radnji, jer će to olakšati i ubrzati daljnji rad. Praktično mjeriti duljinu, pa i kut, treba znati svaki radnik u strojarskoj struci.

Uvijek je dobro istaknuti, najvažniji za uspjeh su pozitivan stav, dobra volja, a zatim rad i upornost. I da, treba raditi malo po malo, ne sve odjednom. Teško da se sve može savladati u jednom danu, no za 15 do 30 dana po 1 sat, sigurno može.

Pula, 4. ožujak 2022.

Miroslav Kuzmić, mag. ing. mech.

TEHNIČKA MEHANIKA

Zbirka riješenih zadataka iz kontrolnih

1. Kontrolni (1. cjelina), grupa A: (Pojam sile, sastavljanje kolinearnih sila, pravilo paralelograma i trokuta sila)

1. Preračunaj masu u silu, odnosno obratno:

- a) 63kg; b) 15kN; c) 35dag; d) 800N

Rješenje:

a) zadano: $m=63\text{kg}$ postupak: $G=m \cdot g$
 $g=9,81 \approx 10 \text{m/s}^2$ $G=63 \cdot 10$
 traži se: $G=?$ $G=630\text{N}$

b) zadano: $G=15\text{kN}$ postupak: $G=m \cdot g$
 $g=9,81 \approx 10 \text{m/s}^2$ $m = \frac{G}{g}$
 traži se: $m=?$ $m = \frac{15000}{10}$

c) zadano: $m=35\text{dag}$ postupak: $G=m \cdot g$
 $g=9,81 \approx 10 \text{m/s}^2$ $G=0,35 \cdot 10$
 traži se: $G=?$ $G=3,5\text{N}$

d) zadano: $G=800\text{N}$ postupak: $G=m \cdot g$
 $g=9,81 \approx 10 \text{m/s}^2$ $m = \frac{G}{g}$
 traži se: $m=?$ $m = \frac{800}{10}$
 $m=80\text{kg}$

Teorija koju treba znati za ovaj zadatak:

Masa je mjera za **tromost**, tj. svojstvo materije da se opire promjeni gibanja. Mjerna jedinica za masu je 1kg. Oznaka za masu je m.

Težina je sila koja vuče sva tijela prema dolje, tj. prema središtu Zemlje. Kao i za svaku drugu силу, mjerna jedinica za težinu je 1N. Oznaka za težinu je G. Masa se preračunava u težinu po formuli:

$$G=m \cdot g$$

g je ubrzanje Zemljine teže, tj. ubrzanje koje dobiva tijelo pri slobodnom padu na Zemlju. Srednja vrijednost iznosi $g=9,81 \approx 10 \text{m/s}^2$ upamti: **masa i težina nisu isto!**

k=kilo - predmetak za uvećanje mjerne jedinice za 1000 puta, npr. $1\text{kN}=1000\text{N}$, $2\text{km}=2 \cdot 1000=2000\text{m}$
 t=tona, mjerna jedinica koja se koristi u praksi za velike mase. $1\text{t}=1000\text{kg}$ - rijetko tko će reći 10000kg ili 10Mg (megagrama) umjesto 10 tona.
 da=deka - predmetak za uvećanje mjerne jedinice za 10 puta.

2. Nacrtaj sile:

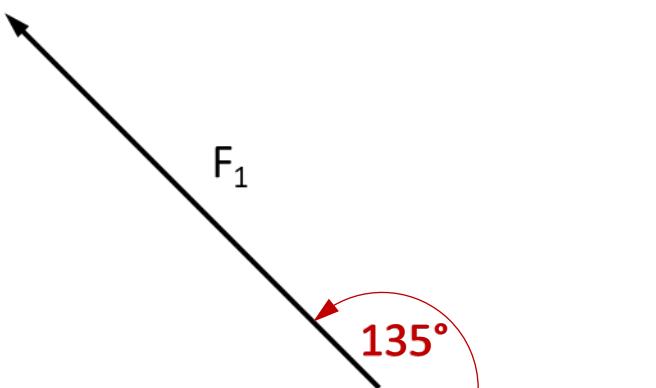
$$F_1=70\text{N}; \alpha_1=135^\circ; \mu_F = \frac{10\text{N}}{1\text{cm}}; F_2=300\text{N}; \alpha_2=300^\circ; \mu_F = \frac{100\text{N}}{1\text{cm}}; \text{ općenito, mjerilo sila je } \mu_F = \frac{F}{L} = \frac{\text{sila}}{\text{duljina}}$$

Rješenje:

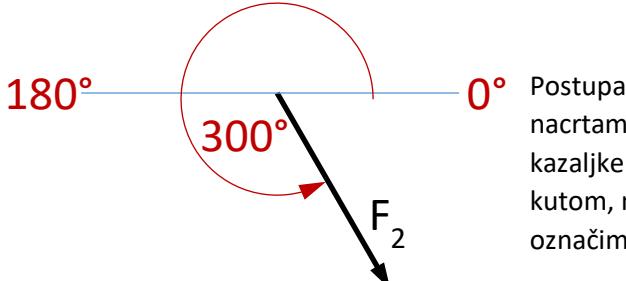
Prije crtanja izračunati duljinu sile na crtežu, tako da se podijeli s mjerilom:

$$L_1 = \frac{F_1}{\mu_F} = \frac{70}{10} = 7\text{cm}, \quad L_2 = \frac{F_2}{\mu_F} = \frac{300}{100} = 3\text{cm}$$

a)



b)



Teorija koju treba znati za ovaj zadatak:

Mjerilo je odnos (omjer) stvarne veličine u prirodi i duljine na crtežu (karti, slici). Upotrebljava se u tehničkim crtežima i zemljopisnim kartama. Oznaka za mjerilo u mehanici je μ (grč, slovo „mi“), jer je M zauzeto – to je oznaka za moment. Indeks označava za koju je veličinu to mjerilo, npr. μ_F je mjerilo za sile (F), μ_L za duljine (L) itd.

Kut je prostor između dvije ravne crte ili 2 ravne plohe. Mjerna jedinica za kut je stupanj (1°). Dogovorno, smjer 0° je crta koja ide od početne točke vodoravno udesno. Pozitivan mjerena kutova je obrnuto od kazaljke na satu, tj. ulijevo.

Sila je **vektor**, tj. usmjerena veličina. Sila je jednoznačno određena sa 4 podatka, koja se moraju vidjeti na crtežu:

1. hvatište – početna točka
2. veličina – duljina na crtežu
3. pravac – određen je izmjerenim kutom
4. smjer – prikazuje ga vrhom strelice.

Postupak: Označimo točku u kojoj mjerimo kut, od te točke nacrtamo vodoravnu crtu udesno, te od nje u smjeru obrnuto od kazaljke na satu (tj. ulijevo) izmjerimo kut. Nacrtamo crtu pod tim kutom, na njoj izmjerimo i podebljamo izračunatu dužinu, kraj sile označimo vrhom strelice i označimo silu.

3. Sastavi (zbroji) analitički i grafički kolinearne sile:

$$F_1=70N; \quad F_2=-20N; \quad F_3=-30N;$$

$$F_4=40N; \quad \mu_F = \frac{10N}{1cm};$$

Rješenje:

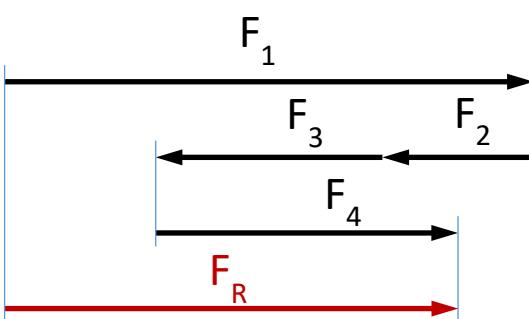
a) analitički:

$$F_R = \sum F_i = F_1 + F_2 + \dots + F_n$$

Uvrste se zadani brojevi:

$$F_R = 70 + (-20) + (-30) + 40 = 70 - 20 - 30 + 40 = 60N$$

b) grafički: nacrtaju se u mjerilu po redu sve zadane sile. Rezultanta se dobije spajanjem početka prve sile sa završetkom zadnje. Kad se mijenja smjer, zbog preglednosti spušta se okomito kratka pomoćna crta, te dalje crta od nje (iako znamo da su sve sile na istom pravcu, suprotni smjer crtamo na paralelnom pravcu).



Teorija koju treba znati za ovaj zadatak:

Kolinearne sile su sile koje leže na istom pravcu (imaju zajedničku liniju). Kolinearne sile mogu se **analitički** zbrajati kao obični brojevi (kao da nisu vektori):

$$F_R = \sum F_i = F_1 + F_2 + \dots + F_n. (\Sigma \text{ čitaj: „suma“ ili „zbroj“})$$

Rezultanta je rezultat zbrajanja sile. Zbrajanjem sile dobije se nova sila, čije je djelovanje jednako ukupnom djelovanju svih zbrojenih sile. Rezultantu označavamo F_R . Sile koje nisu kolinearne (sve ostale vrste) ne smiju se zbrajati kao obični brojevi, nego **vektorski**, jer na zbroj utiču smjerovi zbrojenih sile.

Grafičko zbrajanje (sastavljanje) kolinearnih sila: nacrtaju se u mjerilu **po redu** sve zadane sile. „Po redu“ znači da se nacrtava prva sila, pa u njenom završetku druga sila, itd. Rezultanta se dobije spajanjem početka prve sile sa završetkom zadnje. Kad se mijenja smjer, zbog preglednosti spušta se okomito kratka pomoćna crta, te dalje crta od nje (iako znamo da su sve sile na istom pravcu, suprotni smjer crtamo na paralelnom pravcu).

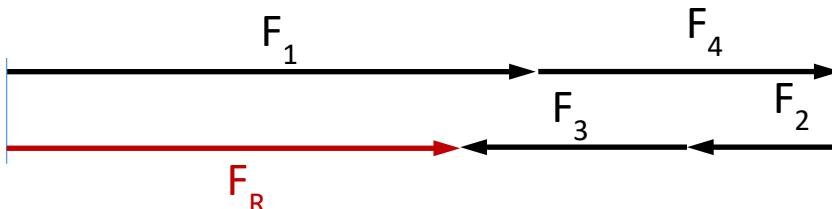
Zadnji korak pri grafičkom rješavanju je uvijek isti:

Izmjeri se duljina rezultata i pomnoži s mjerilom kako bi se dobila prava veličina rezultata. U ovom slučaju, preračunavamo duljinu u rezultantu, odnosno mjerne jedinice cm u N. Ako je crtež točan, u ovom zadatku izmjerit će se duljina rezultante $L_R=6\text{cm}$, pa je:

$$F_R = L_R \cdot \mu_F = 6 \cdot 10 = 60N$$

Drugi način: nacrtaju se prvo sve pozitivne, pa zatim sve negativne sile, jer za zbrajanje vrijedi komutacija.

Crtež je pregledniji, jer ima samo 2 reda:



I kod ovog načina treba izmjeriti duljinu rezultante te je preračunati u Newtonu:

$$F_R = L_R \cdot \mu_F = 6 \cdot 10 = 60N$$

Napomena: Naravno, rezultati dobiveni analitičkim i grafičkim postupkom za isti zadatak trebaju biti isti. Ako nisu, iako odstupaju, negdje smo grubo pogriješili, pa se treba vratiti i pronaći pogrešku.

4. Sastavi (grafički zbroji) pomoću paralelograma sile konkurentne sile:

$$F_1=50N; \quad F_2=30N; \quad \alpha_1=0^\circ; \quad \alpha_2=60^\circ; \quad \mu_F = \frac{10N}{1cm}$$

Rješenje: Prije crtanja izračunati duljinu sile na crtežu, tako

da se podijeli s mjerilom:

$$L_1 = \frac{F_1}{\mu_F} = \frac{50}{10} = 5\text{cm}, \quad L_2 = \frac{F_2}{\mu_F} = \frac{30}{10} = 3\text{cm}$$

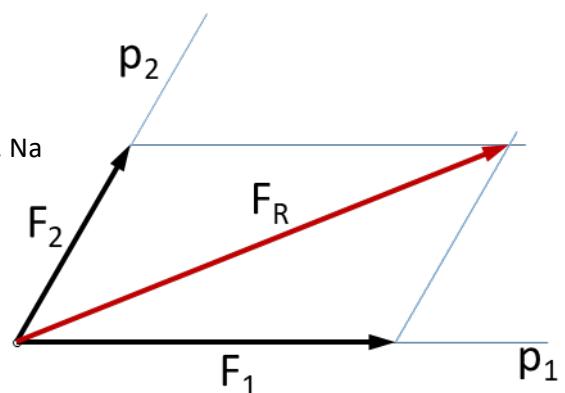
Iz iste točke nacrtaju se polupravci p_1 i p_2 pod kutom $\alpha_1=0^\circ$ i $\alpha_2=60^\circ$. Na njima se podebljavaju izračunate duljine L_1 i L_2 , tj. nacrtaju se sile F_1 i F_2 .

Iz vrhova sile F_1 i F_2 nacrtaju se paralele na pravce p_1 i p_2 i tako

Dobije paralelogram. Dijagonala paralelograma koja prolazi zajedničkim hrvatištem sile je rezultanta. Podeblja se, nacrtava vrh strelice na drugom kraju i označi rezultanta. Zatim joj izmjerimo duljinu i pomoću mjerila preračunamo u N.

$$\text{izmjereno: } L_R = 7\text{cm}$$

$$F_R = L_R \cdot \mu_F = 7 \cdot 10 = 70N$$



Napomena: Analitički, dvije konkurentne sile se mogu zbrojiti pomoću cosinusovog poučka:

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + 2F_1F_2\cos\alpha + F_2^2} = \sqrt{50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 30 \cdot \cos 60^\circ + 30^2} = 70N$$

Treba primjetiti da se konkurentne sile ne smiju zbrajati kao obični brojevi. Npr. U ovom zadatku bi dobili da je $F_R = 50+30=80N$, što očito nije točno, nego je $F_R = 70N$!

Teorija koju treba znati za ovaj zadatak:

Sastavljanje sila je grafičko zbrajanje sile. **Konkurentne sile** su one koje imaju zajedničko hvatište, ili im se pravci djelovanja sijeku. Konkurentne sile ne smiju se zbrajati kao obični brojevi, nego **vektorski**, jer na zbroj utiču smjerovi zbrojenih sile. Ako su samo dvije, mogu se analitički zbrojiti po cosinusovu poučku:

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + 2F_1F_2\cos\alpha + F_2^2}. \text{ Ovdje je } \alpha \text{ kut između sile, izračuna se po izrazu: } \alpha = \alpha_2 - \alpha_1$$

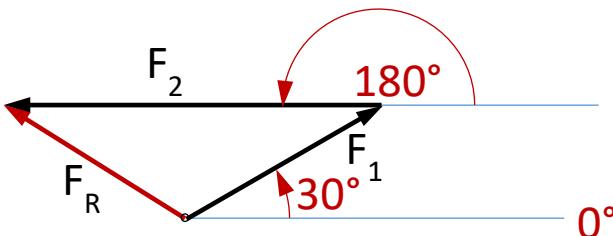
Grafičko zbrajanje (sastavljanje) dvaju konkurentnih sile može se izvesti na 2 načina: metodom **paralelograma** i metodom **trokuta sile**.

Metoda paralelograma crta se tako da iz iste točke nacrtamo obje zadane sile. Zatim na krajevima sile nacrtamo paralele na zadane sile. Dobije se **paralelogram**, četverokut sa paralelnim nasuprotnim stranicama. Rezultanta se dobije crtanjem dijagonale paralelograma kroz početak obje zadane sile. Hvatište rezultante je u zajedničkom hvatištu zadanih sile, a završetak na drugom kraju dijagonale (tu se crta vrh strelice). Kao i na kraju svakog grafičkog zadatka, treba označiti i izmjeriti duljinu rezultante L_R , te je pomnožiti s mjerilom da dobijemo Newton.

$$F_R = L_R \cdot \mu_F$$

5. Sastavi zadane sile pomoću trokuta sile:

$$F_1 = 300N; \alpha_1 = 30^\circ; F_2 = 500N; \alpha_2 = 180^\circ; \mu_F = \frac{100N}{1cm}$$



Rješenje: Prije crtanja izračunati duljinu sile na crtežu, tako da se podijeli s mjerilom:

$$L_1 = \frac{F_1}{\mu_F} = \frac{300}{100} = 3cm, \quad L_2 = \frac{F_2}{\mu_F} = \frac{500}{100} = 5cm$$

Nacrtati se sila F_1 (izračunate duljine L_1) na pravcu p_1 pod kutom $\alpha_1=30^\circ$, pa u njenom završetku sila F_2 (duljina L_2) na pravcu p_2 pod kutom $\alpha_2=180^\circ$. Spojiti se ravnom crtom početak sile F_1 sa završetkom sile F_2 i tako dobije trokut. Treća stranica trokuta je rezultanta. Hvatište rezultante je u hvatištu prve sile, a završetak u završetku druge sile. Nacrtamo u početku točku, a na kraju vrh strelice i označimo rezultantu. Zatim joj izmjerimo duljinu i pomoći mjerila preračunamo u N. Izmjereno: $L_R = 2,8cm$ $F_R = L_R \cdot \mu_F = 2,8 \cdot 100 = 280N$

Teorija koju treba znati za ovaj zadatak:

Konkurentne sile su one koje imaju zajedničko hvatište, ili im se pravci djelovanja sijeku.

Grafičko zbrajanje (sastavljanje) dvaju konkurentnih sile može se izvesti na 2 načina: metodom **paralelograma** i metodom **trokuta sile**.

Trokut sile crta se tako da iz početne točke nacrtamo samo prvu zadanu silu. Zatim na kraju prve sile nacrtamo drugu silu. Spojimo ravnom crtom početak prve i kraj druge sile. Dobije se **trokut**, u kojem je treća stranica (zadnja koju smo nacrtali) **rezultanta**. Hvatište rezultante je u hvatištu prve sile, a završetak u završetku druge sile (tu se crta vrh strelice). Na kraju svakog grafičkog zadatka, treba označiti i izmjeriti duljinu rezultante L_R , te je pomnožiti s mjerilom da dobijemo veličinu rezultante u Newtonima.

$$F_R = L_R \cdot \mu_F$$

***Konkurenca** je natjecanje više sudionika, odn. u ekonomiji „otimanje“ svog dijela „kolača“ od drugih. Kada na tijelo djeluje više sile u različitim smjerovima, ono se neće kretati u smjeru niti jedne od njih, nego nekim novim smjerom – smjerom rezultante.

2. kontrolni (2. cjelina) grupa A: (Analitičko sastavljanje sila, poligon sila, verižni poligon, moment i spreg sila)

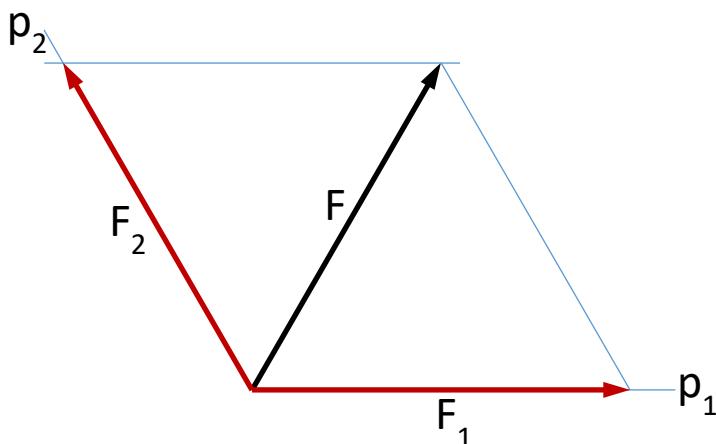
1. Rastavi zadatu silu na komponente F_1 i F_2 koje leže na zadanim pravcima p_1 i p_2 :

$$F = 1000N; \alpha = 60^\circ; \mu_F = \frac{200N}{1cm}. \text{ Pravac } p_1 \text{ zadan je smjerom } \alpha_1 = 0^\circ, \text{ a pravac } p_2 \text{ smjerom } \alpha_2 = 120^\circ.$$

Rješenje:

Prije crtanja izračunati duljinu sile na crtežu, tako da se podijeli s mjerilom:

$$L = \frac{F}{\mu_F} = \frac{1000}{200} = 5\text{cm}. \text{ Izmjeri se kut } \alpha = 60^\circ \text{ i nacrtaj silu } F \text{ duljine } 5\text{cm}.$$

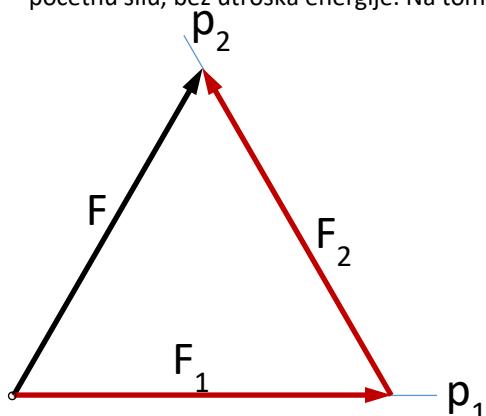


Zadatak se može riješiti na 2 načina: metodom **paralelograma** ili **trokuta sila**. Postupak se izvodi obrnutim redom u odnosu na zbrajanje sila.

a) **Metoda paralelograma:** nacrtaju se oba pravca kroz početak i završetak sile, te dobije paralelogram. Označiti pravce koji prolaze hrvatištem. Stranice paralelograma koje prolaze kroz hrvatište zadane sile su tražene komponente. Podebljati te stranice. Na pravcu p_1 logično leži sila F_1 , a na pravcu p_2 sila F_2 . Hrvatište im je zajedničko (na istom mjestu), a na drugom kraju stranice paralelograma je završetak sile (treba nacrtati vrh strelice). Označiti sile i izmjeriti im duljinu. Pomnožiti duljine sila L_1 i L_2 sa mjerilom da se dobiju veličine sila F_1 i F_2 u Newtonima.

$$\text{Izmjeri se: } L_1 = L_2 = 5\text{cm}, \text{ pa je: } F_1 = L_1 \cdot \mu_F = 5 \cdot 200 = 1000N, F_2 = L_2 \cdot \mu_F = 5 \cdot 200 = 1000N$$

Napomena: Primijetiti da smo od jedne sile 1000N dobili dvije sile, svaka po 1000N! Dakle na neki način smo „udvostručili“ početnu силу, bez utroška energije. Na tom principu rade npr. Rezni alati (oštrica ima oblik klina, koji pojačava ulaznu silu).



b) **metoda trokuta sila:** nacrtaj se pravac p_1 samo iz početka sile F , a pravac p_2 samo kroz njen završetak. Dobije se trokut, u kojem su stranice tražene komponente. Na pravcu p_1 leži sila F_1 , a na pravcu p_2 sila F_2 . Početak sile F_1 je u početku zadane sile, (a završetak na drugom kraju), Početak sile F_2 je u završetku sile F_1 , a završetak sile F_2 u završetku zadane sile. Dakle, komponente moraju početi i završiti na istim mjestima kao zadana sila od koje su nastale rastavljanjem na zadane pravce.
Napomena: zadatak u kontrolnom ne treba rješavati na oba načina, nego izabrati jedan način po svojoj volji (ako u zadatku ne piše na koji način treba riješiti).

Teorija koju treba znati za ovaj zadatak je ista kao za prethodna dva zadatka, samo se radi obrnutim redoslijedom.

2. Sastavi grafički zadane konkurentne sile:

$$F_1=300N; \alpha_1 = 270^\circ; F_2=450N; \alpha_2 = 135^\circ; F_3=400N; \alpha_3 = 60^\circ; F_4=200N; \alpha_4 = 0^\circ; \mu_F = \frac{100N}{1cm}$$

Teorija koju treba znati za ovaj zadatak:

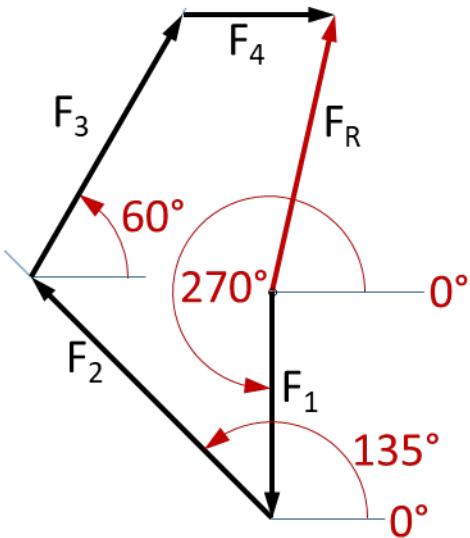
Konkurentne sile su one koje imaju zajedničko hrvatište, ili im se pravci djelovanja sijeku.

Konkurentne sile grafički se zbrajaju (sastavljaju) pomoću **poligona sila**.

Poligon (višekut) sila crta se tako da po redu nacrtamo sve zadane sile. „Po redu“ znači da iz početne točke nacrtamo samo prvu zadanu silu. Zatim na kraju prve sile nacrtamo drugu silu. Na kraju druge sile crtamo treću, itd. Spojimo ravnom crtom početak prve i kraj zadnje sile, i tako dobijemo **rezultantu**. Hrvatište rezultante je u hrvatištu prve sile, a završetak u završetku zadnje sile (tu se crta vrh strelice). Na kraju treba označiti i izmjeriti duljinu rezultante L_R , te je pomnožiti s mjerilom da dobijemo veličinu rezultante u Newtonima.

$$F_R = L_R \cdot \mu_F$$

Poligon (višekut) sila uvijek ima jedan kut više od broja sile koje zbrajamo, npr. Kad zbrajamo 2 sile to je trokut, kad zbrajamo 3 sile četverokut itd.



Rješenje: Nacrtaj se poligon sila, spoji početak prve sile sa završetkom zadnje i dobije rezultanta. Zatim joj izmjerimo duljinu i pomoću mjerila preračunamo u Newton.

$$\text{Izmjereno: } L_R = 3,7 \text{ cm}$$

$$F_R = L_R \cdot \mu_F = 3,7 \cdot 100 = 370 \text{ N}$$

3. Sastavi (zbroji) analitički konkurentne sile:

$$F_1 = 40 \text{ N}; \alpha_1 = 30^\circ; F_2 = 50 \text{ N}; \alpha_2 = 135^\circ; F_3 = 30 \text{ N}; \alpha_3 = 180^\circ; F_4 = 20 \text{ N}; \alpha_4 = 330^\circ; \mu_F = \frac{10 \text{ N}}{1 \text{ cm}}$$

Rješenje: u formule upišemo zadane podatke (brojeve), zatim u kalkulator, i izračunamo:

$$F_{xi} = F_i \cdot \cos \alpha_i$$

$$F_{x1} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 40 \cdot \cos 30^\circ = 34,64 \text{ N}$$

$$F_{x2} = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 50 \cdot \cos 135^\circ = -35,36 \text{ N}$$

$$F_{x3} = F_3 \cdot \cos \alpha_3 = 30 \cdot \cos 180^\circ = -30 \text{ N}$$

$$F_{x4} = F_4 \cdot \cos \alpha_4 = 20 \cdot \cos 330^\circ = 17,32 \text{ N}$$

$$R_x = \sum F_{xi} = 34,64 - 35,36 - 30 + 17,32 = -13,4 \text{ N}$$

$$F_{yi} = F_i \cdot \sin \alpha_i$$

$$F_{y1} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 40 \cdot \sin 30^\circ = 20 \text{ N}$$

$$F_{y2} = F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 50 \cdot \sin 135^\circ = 35,36 \text{ N}$$

$$F_{y3} = F_3 \cdot \sin \alpha_3 = 30 \cdot \sin 180^\circ = 0 \text{ N}$$

$$F_{y4} = F_4 \cdot \sin \alpha_4 = 20 \cdot \sin 330^\circ = -10 \text{ N}$$

$$R_y = \sum F_{yi} = 20 + 35,36 + 0 - 10 = 45,36 \text{ N}$$

$$\text{Rezultanta: } F_R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{13,4^2 + 45,36^2} = 47,3 \text{ N}$$

Teorija koju treba znati za ovaj zadatak:

Konkurentne sile analitički se zbrajaju vektorski. Zbrajanjem sila dobiva se **rezultanta**. To je sila koja zamjenjuje ukupno djelovanje svih zbrojenih sila. Rezultantu označavamo \mathbf{F}_R . Ponovimo: Konkurentne sile ne smiju se zbrajati kao obični brojevi, nego **vektorski**, jer na zbroj utiču smjerovi zbrojenih sila.

Postupak se provodi u 3 koraka:

1. Sve zadane sile rastave se **analitički** na komponente u smjeru koordinatnih osi (x je vodoravna, a y okomita os). Komponente u smjeru osi x i y računaju se po formulama: $F_{xi} = F_i \cdot \cos \alpha_i$ - u smjeru osi x (vodoravne)

$F_{yi} = F_i \cdot \sin \alpha_i$ - u smjeru osi y (uspravne)

gdje je i broj sile ($i=1,2,3,\dots,n$), n je broj sila (zadnje sile).

Sin i cos su trigonometrijske funkcije, uče se u matematici. Ako je L duljina, a α kut kosog štapa (crte) od horizontale, množenjem duljine L s $\cos \alpha$ dobiva se duljina vodoravne sjene (na podu), a sa $\sin \alpha$ okomite (na zidu). Treba imati kalkulator s tipkama sin, cos i tan.

2. Zbroje se posebno komponente svih sila u smjeru osi x, a posebno komponente u smjeru osi y. To su kolinearne sile, pa ih zbrajamo kao obične brojeve, tj. po formulama:

Rezultanta po x osi: $R_x = \sum F_{xi} = F_{x1} + F_{x2} + \dots + F_{xn}$

Rezultanta po y osi: $R_y = \sum F_{yi} = F_{y1} + F_{y2} + \dots + F_{yn}$

3. Ukupna rezultanta dobiva se po Pitagorinom poučku, tj. po formuli: $F_R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$, jer su R_x i R_y katete, a F_R hipotenuza pravokutnog trokuta.

Smjer rezultante može se izračunati po formuli:

$$\alpha_R = \arctan \frac{R_y}{R_x}$$
 (to ne pitam, ali dobro je znati)

Napomena: Vektorski zbroj sila se zapisuje ovako:

$$\overrightarrow{F_R} = \sum \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \dots + \overrightarrow{F_n}$$

Čita se: „Vektor rezultante jednak je zbroju vektora svih sila.“

4. Grafički sastavi (zbroji) paralelne sile, ako su zadani razmaci između njih (a_1 i a_2):

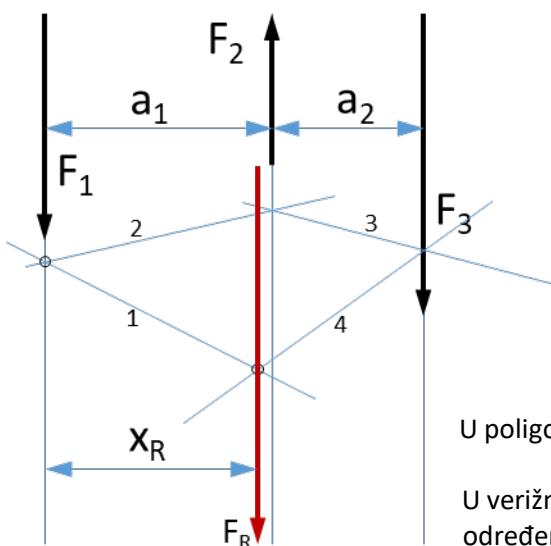
$$F_1=300N; a_1 = 3m; F_2=-200N; a_2 = 2m; F_3=400N; \mu_F = \frac{100N}{1cm}; \mu_L = \frac{1m}{1cm}$$

Rješenje: Prije crtanja izračunati duljinu sila i razmaka na crtežu, tako da se podijele s mjerilom:

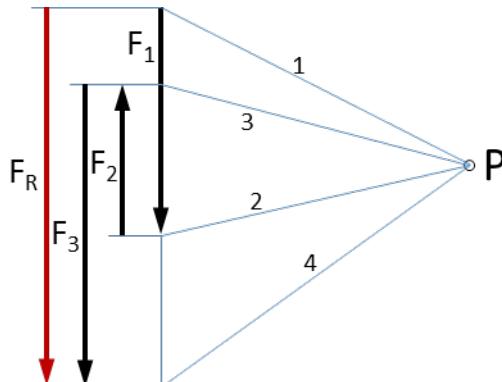
$$L_1 = \frac{F_1}{\mu_F} = \frac{300}{100} = 3cm, L_2 = \frac{F_2}{\mu_F} = \frac{200}{100} = 2cm, L_3 = \frac{F_3}{\mu_F} = \frac{400}{100} = 4cm, x_1 = \frac{a_1}{\mu_L} = \frac{3}{1} = 3cm, x_2 = \frac{a_2}{\mu_L} = \frac{2}{1} = 2cm.$$

Nacrtati i na lijevoj strani papira zadane sile sa zadanim razmacima, a zatim na desnoj poligon sile.

VERIŽNI POLIGON (PLAN POLOŽAJA)



POLIGON SILA (PLAN SILA)



U poligonom sila izmjeri se duljina rezultante: $L_R=5cm$, te izračuna njena veličina:

$$F_R = L_R \cdot \mu_F = 5 \cdot 100 = 500N$$

U verižnom poligonom izmjeri se udaljenost rezultante od prve sile, čime je određen položaj rezultante: $a_R = x_R \cdot \mu_F = 2,8 \cdot 1 = 2,8m$

Upute: Poligon sile crta se kao da su to kolinearne sile (vidi 3. zadatak 1. kontrolnog ako ne znaš kako). Desno od poligona sile, bilo gdje, nacrtati se točka P (pol). Spojite se ravnim crtama početci i završetci svih sile i pol, te tako dobiju zrake. Sve zrake crtaju se od iste okomite osnovne crte (pravca sile F_1). Zrake se označe brojevima redom kako su nastale (na početku prve sile je zraka 1, na završetku F_1 je zraka 2 itd. Zatim se redom nacrtaju paralele zrake u lijevom dijelu crteža, da bi se dobio verižni poligon. „Redom“ znači da se prvo crta paralela na zraku 1, zatim paralela zrake 2 kroz sjecište zrake 1 i pravca sile F_1 , zatim zraka 3 u sjecištu zrake 2 i pravca F_2 itd. Zadnja zraka negdje siječe prvu. Kroz tu točku nacrtati se rezultanta F_R , time je određen položaj rezultante. Upozorenje: **Verižni poligon ne može se nacrtati prije poligona sile!** Treba poštovati redoslijed.

Teorija koju treba znati za ovaj zadatak:

Paralelne sile su one koje leže na paralelnim prvcima. **Pravac** je beskonačna ravna crta. **Paralelni pravci** su oni koji leže u istoj ravnini i prolaze jedan pored drugoga posvuda na istoj udaljenosti, dakle nigdje se ne sijeku. Paralelnost se može proširiti (primijeniti) u praksi na bilo koje 2 stvari, tako željeznička pruga ima paralelne tračnice, dalekovod paralelne žice, često se javljaju paralelne cijevi, vratila, osi predmeta, zidovi, stupovi itd.

Paralelne sile grafički se zbrajaju (sastavljaju) pomoću 2 crteža: **poligona sile i verižnog (lančanog) poligona**.

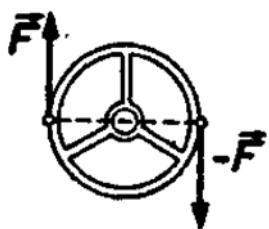
Pomoću poligona sile odredi se **veličina**, a pomoću verižnog poligona **položaj rezultante**.

Poligon (višekut) sile crta se tako da po redu nacrtamo sve zadane sile. „Po redu“ znači da iz početne točke nacrtamo samo prvu zadanu silu. Zatim na kraju prve sile nacrtamo drugu silu. Na kraju druge sile crtamo treću, itd. Spojimo ravnim crtom početak prve i kraj zadnje sile, i tako dobijemo **rezultantu**. Hvatište rezultante je u hvatištu prve sile, a završetak u završetku zadnje sile (tu se crta vrh strelice). Kad se mijenja smjer sile, zbog preglednosti crta se okomitno na prethodnu silu (tj. vodoravno) kratka pomoćna crta, te sljedeća sila dalje crta od nje (suprotni smjer crtamo na paralelnom prvcu). Na kraju treba označiti i izmjeriti duljinu rezultante L_R , te je pomnožiti s mjerilom da dobijemo veličinu rezultante u Newtonima. $F_R = L_R \cdot \mu_F$

Verižni poligon crta se poslije poligona sile. Producimo pravce svih sile u planu položaja (crtežu koji pokazuje točne položaje, odn. razmake paralelnih sile). Desno od poligona sile po volji odaberemo točku P (pol). Spojite se početci i završetci svih sile sa polom, te dobiju zrake. Sve zrake crtaju se od iste okomite osnovne crte (pravca sile F_1). Oznaće se brojevima redom kako su nastale (na početku prve sile je zraka 1, na završetku F_1 je zraka 2 itd. Zatim se redom nacrtaju paralele zraka lijevo u planu položaja, te se dobije verižni poligon. „Redom“ znači da se prvo crta paralela na zraku 1, zatim paralela zrake 2 kroz sjecište zrake 1 i pravca sile F_1 , zatim zraka 3 u sjecištu zrake 2 i pravca F_2 itd. Kroz sjecište prve i zadnje zrake nacrtati se rezultanta F_R i time je određen položaj rezultante. Izmjeri se udaljenost rezultante od prve sile, te izračuna pomoću mjerila položaj rezultante: $a_R = x_R \cdot \mu_F$

Upozorenje: **Verižni poligon ne može se nacrtati prije poligona sile!** Treba poštovati redoslijed.

5. Na upravljač promjera 40cm pri skretanju djeluje vozač s obje ruke silom 3N. Koliki moment djeluje na vratilo upravljača?



zadano: $a=d=40\text{cm}=0,4\text{m}$
 $F=F_1=F_2=3\text{N}$

traži se: $M=?$

postupak: $M=F \cdot a$
 $M=3 \cdot 0,4$
 $M=1,2\text{Nm}$

odgovor: Na vratilo upravljača djeluje moment 1,2Nm.

Teorija koju treba znati za ovaj zadatak:

Moment sile je uzrok kružnog gibanja, odn. vrtnje ili rotacije. Veličina momenta jednaka je umnošku sile i kraka:

$M = F \cdot r$ Krak r je najkraća udaljenost sile od centra vrtnje. Mjeri se na okomici na silu koja prolazi kroz centar vrtnje. Mjerna jedinica za moment je Nm (Newton puta metar).

Par ili spreg sile čine dvije paralelne sile iste veličine, a suprotnog smjera. **Rezultanta** para sila jednaka je nuli, no tijelo na koje djeluje par sila nije u ravnoteži, nego se vrti ili barem teži vrtnji. Djelovanje para sila na tijelo je dakle jednako djelovanju momenta sile – spreg sila također uzrokuje vrtnju.

Moment sprega sile jednak je umnošku sile i udaljenosti sila u spregu: $M = F \cdot a$. Ovdje je a razmak između sila.

U ovu formulu se upisuje samo jedna sila (ne zbrajaju se obje)! $F = F_1 = F_2$

Napomena: Zadaci mogu imati kao nepoznanicu bilo koju od tri veličine (slova) koje se javljaju u jednadžbi. Što je nepoznato u zadatku treba zaključiti iz teksta zadatka prije rješavanja. Iz matematike bi svaki učenik trebao znati rješiti ovako jednostavnu jednadžbu s jednom nepoznanicom. Cilj je dobiti oblik jednadžbe u kojem je **nepoznanica sama na lijevoj strani jednadžbe**, a na drugoj sve ostalo. Da bi se to postiglo, sve što trenutno u jednadžbi stoji pored nepoznanice treba prebaciti na drugu stranu. Zapamtiti i upotrijebiti **zlatno pravilo matematike: Na drugu stranu jednadžbe** se prebacuje (bilo što, dakle slovo, brojka ili njihova kombinacija) sa suprotnom računskom operacijom. (Treba ispraviti možda u osnovnoj školi krivo naučeno pravilo sa suprotnim predznakom, jer ono vrijedi samo za zbrajanje i oduzimanje!) Suprotne operacije su zbrajanje-oduzimanje, množenje-dijeljenje, kvadriranje-korjenovanje... Primjenom zlatnog pravila, iz osnovne formule se dobiju izvedene:

- kad se traži sila (poznati su moment sile i krak): $F = \frac{M}{r}$
- kad se traži sila (poznati su moment sprega sila i njihov razmak): $F = \frac{M}{a}$
- kad se traži krak (poznati su moment sile i sila): $r = \frac{M}{F}$
- kad se traži razmak sila u spregu (poznati su moment sile i sila): $a = \frac{M}{F}$

Dakle, ne treba pamtiti sve ove 4 formule, nego samo jednu: $M = F \cdot r$ za moment sile, odn. $M = F \cdot a$ za spreg sile, te zlatno pravilo matematike. Naravno, treba znati što se „krije“ iza svakog slova u tim jednadžbama. F =sila, M =moment, r =krak, a =razmak sila u paru.

Također uvijek treba voditi računa o mjernim jedinicama. Kako ne bi došlo do zabune i grubih grešaka, treba pretvoriti mjerne jedinice u osnovne. Za to treba ponoviti gradivo s početka školske godine (odn. još iz osnovne škole) o mjernim jedinicama i predmetcima (prefiksima) za umanjenje i uvećanje mernih jedinica. Dakle što znači deci, centi, mili, mikro, deka, hekti, kilo i mega. Primjer: „kilo“ znači 1000. Dakle 1km=1000m, 85kW=85000W (Watta), 10kV=10000V (Volti), itd. Iznimka je 1kg, koji je osnovna merna jedinica za masu, pa ga ne treba preračunavati u grame, iako vrijedi 1kg=1000g! (To je trebalo znati za 1. zadatak u 1. kontrolnom, a treba i dalje, uvijek.)

Isto tako, „centi“ znači stoti dio nečega, dakle $1/100=0,01$ nečega, npr. $1\text{c}\text{\euro}=0,01\text{\euro}$, $5\text{cm}=5 \cdot 0,01=0,05\text{m}$ itd.

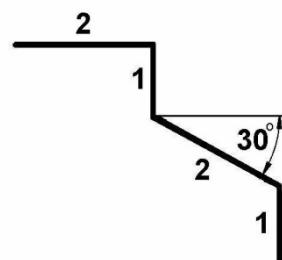
Ponoviti za ostale prefikse (barem ovdje spomenute, jer ih ima još)!

3. dio: (Težište homogenih materijalnih linija i ploha, vrste i uvjeti ravnoteže, jednostavni strojevi)

1. Grafički i analitički odredi težište homogene materijalne linije zadane skicom:

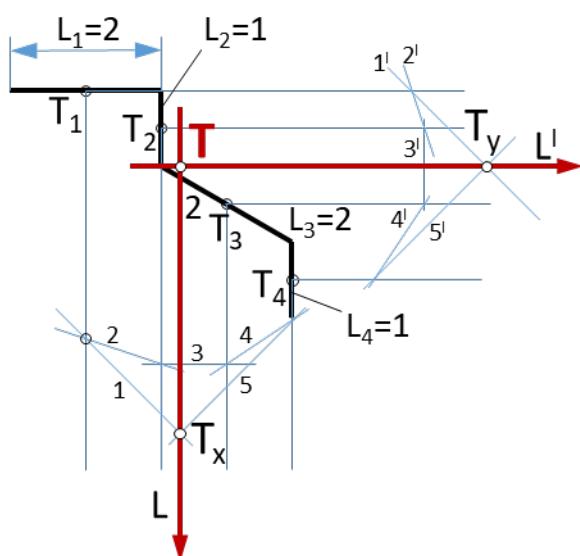
Mjerilo duljina: $\mu_L = \frac{1\text{m}}{1\text{cm}}$ (dakle 1m u prirodi=1cm na crtežu)

Rješenje:

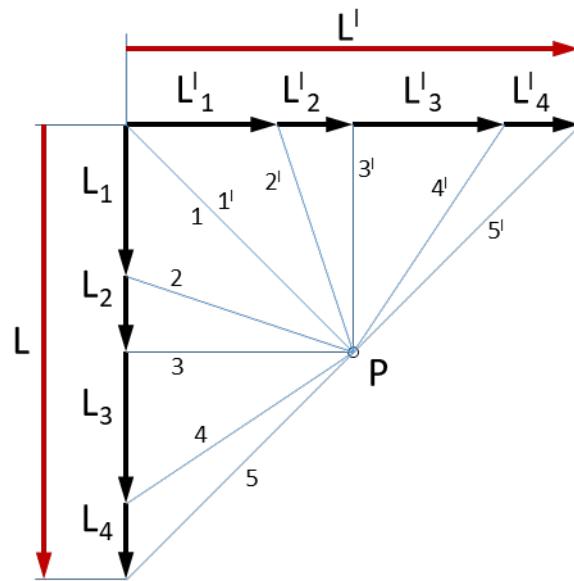


1. grafički: Podijeliti papir na 2 dijela, lijevi i desni. Nacrtati lijevo zadani predmet u mjerilu. Tu će na kraju zadatka biti verižni poligon. Razdijeliti predmet na jednostavne crte (ravne ili dijelove kružnice). Označiti sve dijelove (L_1, L_2, \dots). Svakom dijelu označiti vlastito težište (T_1 je težište dijela L_1 itd.). Kroz sva pojedinačna težišta povući pomoćne crte u dva smjera: okomito za dolje i vodoravno udesno. Zatim na desnom dijelu papira nacrtati poligon sila (odnosno dužina), u vertikalnom i horizontalnom smjeru. Oznake dužina bez crtice odnose se na uspravni, a s crticom na vodoravni smjer, npr. L_1 i L'_1 (čitaj: „L jedan i L jedan crtano“). Nacrtati se rezultanta (ukupna dužina svih crta) u oba smjera (L i L'). Izmjeri se i napiše koliko je ukupna dužina: $L=6\text{m}$.

PLAN POLOŽAJA (VERIŽNI POLIGON)



PLAN SILA



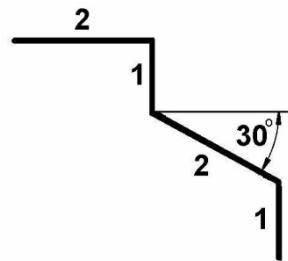
Odabrati pol (točku P), najbolje na sredini crte koja spaja kraj zadnje sile u oba smjera (ako je sve točno, biti će pod kutom 45°). Nacrtati zrake, spajajući sa P početke i krajeve svih sila. Numerirati zrake po redu. (Za vodoravni smjer svim brojevima dodamo crticu.) Zatim se crtaju 2 verižna poligona, jedan za vertikalni, drugi za horizontalni smjer. Postupak je isti za oba smjera, ali jednom gledamo dijelove s oznakama bez crtica, a drugi put samo dijelove s crticama! Tom postupku dat ćemo ime - 4. korak: Redom nacrtati paralele zraka lijevo u planu položaja. „Redom“ znači: prvo se crta paralela na zraku 1, zatim paralela zrake 2 kroz sjecište zrake 1 i pravca sile G_1 , zatim zraka 3 u sjecištu zrake 2 i pravca G_2 itd. Kroz sjecište prve i zadnje zrake (točku T_x) nacrtati se rezultanta, tj. ukupna težina G, (odnosno ukupna dužina L) i tako se odredi položaj težišta po osi x. Zatim se ponovi 4. korak za vodoravni smjer, dakle uzimajući zrake $1'$ do $5'$ i njihova sjecišta sa vodoravnim pomoćnim crtama kroz pojedinačna težišta (T_1 do T_4). Kroz sjecište prve ($1'$) i zadnje zrake ($5'$), tj. točku T_y nacrtati se (vodoravno) ukupna težina G' , (odnosno ukupna dužina L'). Tako se odredi položaj težišta po osi y. Težište se nalazi u sjecištu rezultanti za oba smjera. Označimo ga točkom T. Napomena: Zraka 1 crta se tako da sijeće pomoćnu okomitu crtu kroz T_1 i može se nacrtati bilo gdje po visini. Dalje se više ništa ne smije crtati po volji, nego točno po pravilu: svaka sljedeća zraka ide kroz sjecište prethodne zrake i pravca istoimene sile (težine) – dakle zraka 2 kroz sjecište zrake 1 i okomice kroz T_1 , zraka 3 kroz sjecište zrake 2 i okomice kroz T_2 itd..

Teorija koju treba znati za ovaj zadatak:

Težište je točka kroz koju prolazi ukupna težina tijela. Ili, još kraće: Težište je hvatište težine. **Težina** je sila koja vuče za dolje. Dolje je prema središtu Zemlje. U stvarnosti, težina nije sila koncentrirana u jednoj točki, već je razdijeljena na mnogo malih težina pojedinih čestica (sitnih dijelova). Ukupna težina je zbroj tih malih težina svih čestica tijela, dakle rezultanta paralelnih sila. Već je rečeno (vidi 4. zadatak 2. kontrolnog ako se ne sjećaš) da je kod zbrajanja paralelnih sila važno osim veličine rezultante odrediti i njen položaj (mjesto u prostoru). **Grafički** se težište određuje tako da za iste paralelne sile (težine dijelova tijela) nacrtamo **verižni poligon** 2 puta, u 2 međusobno okomita smjera. Težište je sjecište dobivenih rezultanti iz oba smjera.

Pri ovom postupku koristimo činjenicu da težište ne mijenja svoj položaj prema tijelu, bez obzira kako se to tijelo pomiče ili okreće. Dakle, ako nacrtamo ili „slikamo“ težinu u jednom položaju tijela, a zatim ga zakrenemo za 90° i ponovo u tom položaju nacrtamo odn. „slikamo“ težinu, obje će se sile (vektori) sjeći u toj točki – težištu.

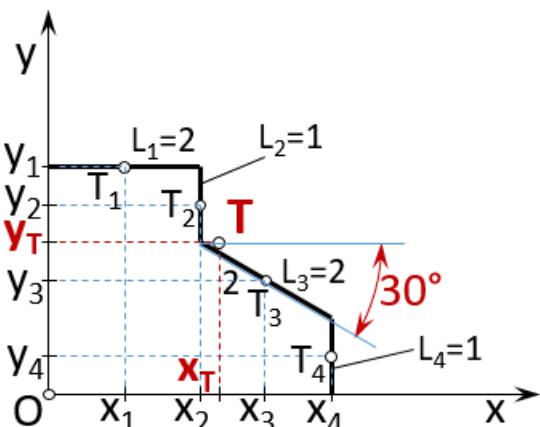
2. analitički: zadana je skica



Drcra se koordinatni sustav, tako da x-os dodiruje donji, a y-os lijevi rub predmeta. Označe se dijelovi (duljine) L_1 do L_4 , te svakom dijelu ucrti na sredini (polovici duljine) vlastito težište. Očitaju se ako je sve nacrtano u mjerilu (ili za kose i kružne linije izračunaju po formulama) koordinate težišta dijelova. Težište prvog dijela T_1 ima koordinate $x_1 = L_1 / 2 = 1\text{m}$, $y_1 = 3\text{m}$. Piše se i ovako: $T_1(1,3)$. Sve koordinate se mjere od ishodišta koordinatnog sustava, tj. točke $O(0,0)$.

Sa crteža se pročita:

$$\begin{array}{ll} L_1=2\text{m} & x_1=1\text{m} \quad y_1=L_4 + L_3 \cdot \sin\alpha_3 + L_2 = 1 + 2 \cdot 0,5 + 1 = 3\text{m} \\ L_2=1\text{m} & x_2=2\text{m} \quad y_2=2,5\text{m} \\ L_3=2\text{m}, \alpha_3=30^\circ, & x_3=L_1 + \frac{L_3}{2} \cdot \cos\alpha_3 = 2 + 1 \cdot 0,866 = 2,87\text{m}, \quad y_3=L_4 + \frac{L_3}{2} \cdot \sin\alpha_3 = 1 + 1 \cdot 0,5 = 1,5\text{m} \\ L_4=1\text{m} & x_4=L_1 + L_3 \cdot \cos\alpha_3 = 2 + 2 \cdot 0,866 = 3,73\text{m}, \quad y_4=0,5\text{m} \end{array}$$



$$\begin{aligned} \text{Ukupna dužina: } L &= \sum L_i = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \\ &= 2 + 1 + 2 + 1 = 6\text{m} \end{aligned}$$

Koordinate težišta se računaju po formulama:

$$x_T = \frac{\sum L_i \cdot x_i}{L} = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2,87 + 1 \cdot 3,73}{6} = 2,25\text{m}$$

$$y_T = \frac{\sum L_i \cdot y_i}{L} = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 2,5 + 2 \cdot 1,5 + 1 \cdot 0,5}{6} = 2\text{m}$$

Dakle je traženo težište: $T(2,2,25;2)$

Teorija koju treba znati za ovaj zadatak:

Težište je točka kroz koju prolazi ukupna težina tijela, odnosno hvatište težine. Ukupna težina je zbroj težina svih dijelova tijela: $G = \sum G_i$. Kod homogenih materijalnih linija (šipke, cijevi, profili, žice i sl.), težine i duljine su proporcionalne, pa se umjesto s težinama (G_i) može računati sa duljinama dijelova (L_i). **Ukupna je dulžina** zbroj duljina pojedinih dijelova: $L = \sum L_i = L_1 + L_2 + \dots + L_n$. materijalnih Položaj težišta određen je koordinatama, tj. udaljenostima od nule mjereno po x i y osi (vodoravno i uspravno). Označava se $T(x_T, y_T)$.

Analitički se težište složene materijalne linije određuje pomoću formula:

$$x_T = \frac{\sum L_i \cdot x_i}{L} = \frac{L_1 \cdot x_1 + L_2 \cdot x_2 + \dots + L_n \cdot x_n}{L}$$

$$y_T = \frac{\sum L_i \cdot y_i}{L} = \frac{L_1 \cdot y_1 + L_2 \cdot y_2 + \dots + L_n \cdot y_n}{L}$$

Gdje je: x_T = koordinata x težišta (vodoravna udaljenost T od 0).

y_T = koordinata y težišta (vertikalna udaljenost T od 0).

i=broj dijela, i=1,2,3,...,n, a n je broj zadnjeg dijela, odn. broj dijelova.

L_i =duljina i-tog dijela; L =ukupna duljina cijele složene linije

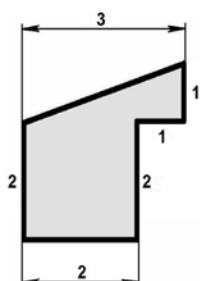
x_i = koordinata x i-tog dijela,

y_i = koordinata y i-tog dijela.

2. Grafički i analitički odredi težište homogene materijalne plohe zadane skicom 2:

Rješenje:

a) grafički: Podijeliti papir na 2 dijela, lijevi i desni. Nacrtati lijevo zadani predmet u mjerilu. Tu će na kraju zadatka biti verižni poligon. Razdijeliti predmet na jednostavne površine, odn. geometrijske likove (kvadrat, pravokutnik, trokut, krug ili dio kruga). Površina se podijeli na jednostavne likove, trokut i kvadrat. Očitaju se sa crteža mjere: $a_1=3\text{cm}$, $b_1=1\text{cm}$, $a_2=2\text{cm}$, $b_2=2\text{cm}$,



Izračunaju se površine dijelova, pri čemu je A_1 površina trokuta, a A_2 kvadrata:

$$A_1 = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 1}{2} = 1,5 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = a^2 = 2^2 = 4 \text{ cm}^2$$

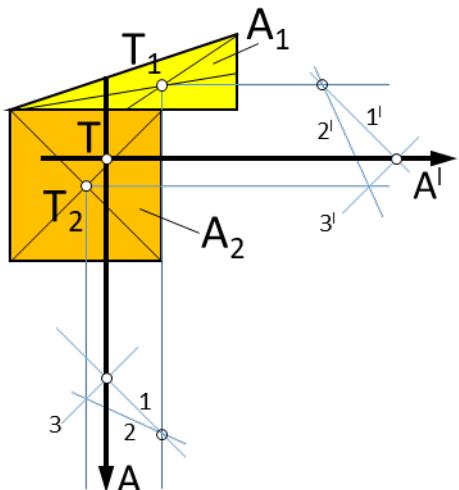
Desno se nacrtava poligon sila (odnosno površina), i to u okomitom i vodoravnom smjeru, te dobije resultanta, ukupna površina $A=A'=5,5 \text{ cm}^2$.

Odabrati pol (točku P) na sredini crte koja spaja kraj zadnje sile u oba smjera (pod kutom 45°). Nacrtati zrake, spajajući sa P početke i krajeve svih sila. Numerirati zrake po redu. (Za vodoravni smjer svim brojevima dodamo crticu.) Zatim se crtaju 2 verižna poligona, jedan za vertikalni, drugi za horizontalni smjer.

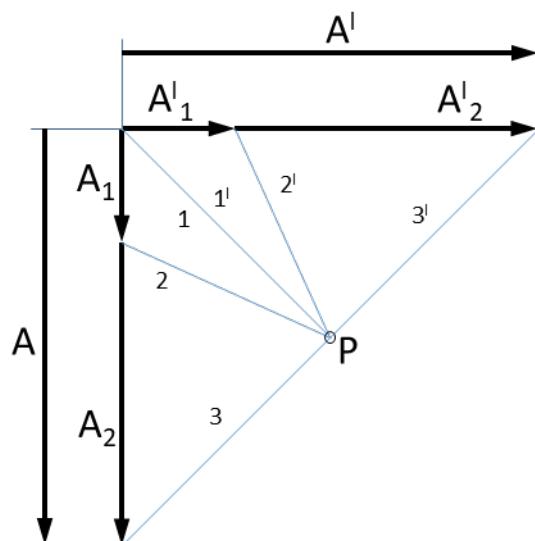
4. korak: Redom nacrtati paralele zraka lijevo u planu položaja. „Redom“ znači: prvo se crta paralela na zraku 1, zatim paralela zraka 2 kroz sjecište zraka 1 i pravca sile A_1 , zatim zraka 3 u sjecištu zraka 2 i pravca A_2 . Kroz sjecište prve i zadnje zrake nacrtava se resultanta, tj. ukupna težina G, (odnosno ukupna površina A) i tako se odredi položaj težišta po osi x. Zatim se ponovi 4. korak za vodoravni smjer, dakle uzimajući zrake $1'$ do $3'$ i njihova sjecišta sa vodoravnim pomoćnim crtama kroz pojedinačna težišta (T_1 i T_2). Kroz sjecište prve ($1'$) i zadnje zrake ($3'$) nacrtava se (vodoravno) ukupna površina A' . Tako se odredi položaj težišta po osi y. Težište se nalazi u sjecištu resultanti za oba smjera.

Označimo ga točkom T.

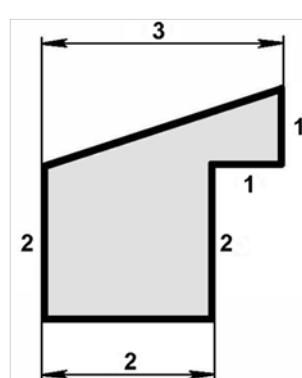
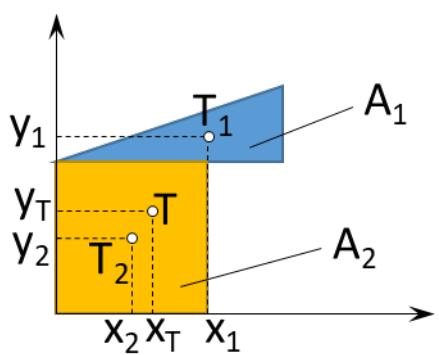
PLAN POLOŽAJA (VERIŽNI POLIGON)



PLAN SILA



b) analitički:



Površina se podijeli na jednostavne likove, trokut i kvadrat. Drcat će koordinatni sustav, tako da x-os dodiruje donji, a y-os lijevi rub predmeta. Označite se dijelovi (površine) A_1 i A_2 , te svakom dijelu ucrtajte težište. Težište trokuta nalazi na $1/3$ visine mjereno od baze, odn. $2/3$ visine mjereno od vrha, a težište kvadrata u sredini, tj. na pola duljine stranica (u sjecištu simetrala). Očita se sa crteža:

$a=3 \text{ cm}$, $b_1=1 \text{ cm}$, $a_2=2 \text{ cm}$, te koordinate pojedinačnih težišta:
 $x_1=2 \text{ cm}$, $y_1=2+1/3=2,33 \text{ cm}$
 $x_2=1 \text{ cm}$, $y_2=1 \text{ cm}$

Izračunaju se površine dijelova, pri čemu je A_1 površina trokuta, a A_2 kvadrata:

$$A_1 = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 1}{2} = 1,5 \text{ cm}^2 \quad A_2 = a^2 = 2^2 = 4 \text{ cm}^2$$

Izračuna se ukupna površina: $A = \sum A_i = A_1 + A_2 = 1,5 + 4 = 5,5 \text{ cm}^2$

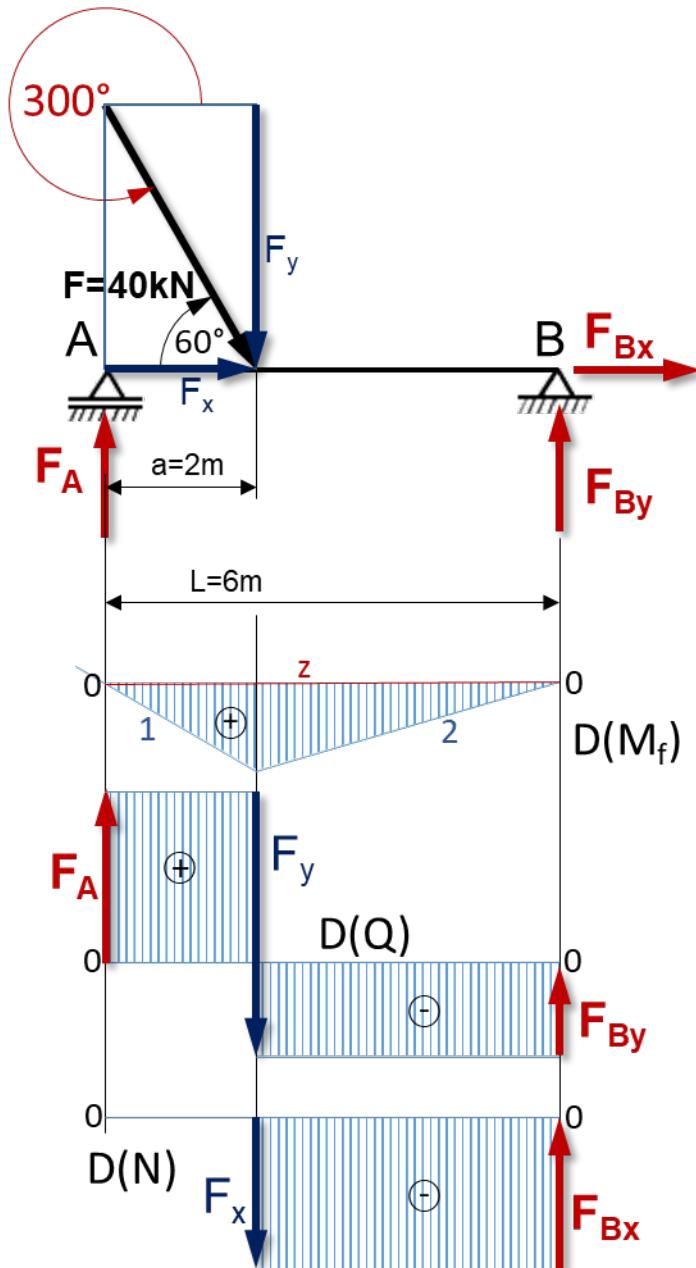
Te podatke treba uvrstiti u formule za koordinate težišta i izračunati:

$$x_T = \frac{\sum A_i \cdot x_i}{A} = \frac{1,5 \cdot 2 + 4 \cdot 1}{5,5} = 1,27 \text{ cm}$$

$$y_T = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{A} = \frac{1,5 \cdot 2,33 + 4 \cdot 1}{5,5} = 1,36 \text{ cm}$$

4. dio: (puni ravni nosači, uvjeti ravnoteže, trenje)

1. Riješi grafički i analitički zadani nosač, tj. odredi reakcije u osloncima, max. moment savijanja, poprečne i uzdužne sile. Zadana je prosta greda s nepomičnim desnim osloncem, dužine $L=6\text{m}$. Opterećena je na udaljenosti $a=2\text{m}$ od lijevog oslonca silom $F=40\text{kN}$, koja djeluje pod kutom $\alpha=300^\circ$. Mjerila su $\mu_F = \frac{10\text{kN}}{1\text{cm}}$, $\mu_L = \frac{1\text{m}}{1\text{cm}}$.



Zadano: $L=6\text{m}$, $a=2\text{m}$, n.d.o.

$F=40\text{kN}$, $\alpha=300^\circ$

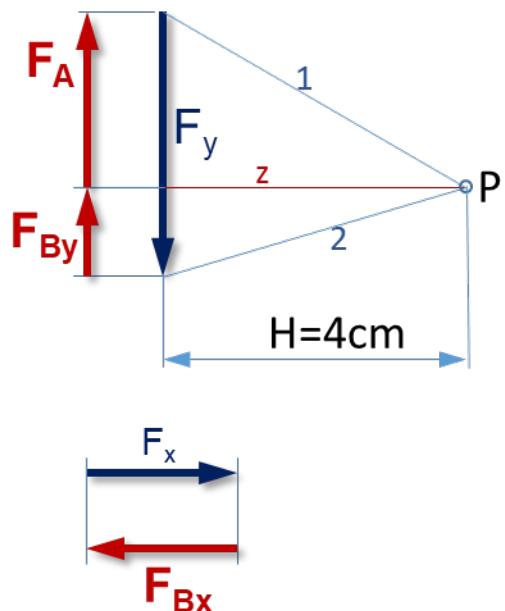
Traži se: $F_A=?$, $F_B=?$, $D(M_f)$, $D(Q)$, $D(N)=?$

a) grafički postupak:

- Nacrtati u mjerilu nosač i zadanu silu. Prema tekstu postaviti pomični oslonac lijevo, nepomični desno.

Mjerila su: $\mu_F = \frac{1\text{kN}}{1\text{cm}}$, $\mu_L = \frac{1\text{m}}{1\text{cm}}$

- Rastaviti kosu silu na vodoravnu i uspravnu komponentu, označiti ih (F_x i F_y), izmjeriti im duljinu i preračunati u kN. ($F_x=20\text{kN}$, $F_y=35\text{kN}$)



- Ucrati pretpostavljene reakcije u osloncima, označiti ih,
- Ispod oslonaca i sila spustiti tanke pomoćne crte za budući verižni poligon,
- Desno nacrtati poligon sila (samo s vertikalnim silama). U ovom zadatku nacrtati samo силу F_y . Označiti pol P i spojiti s njime početak i završetak sile F_y . Tako dobivene zrake označiti brojevima redom kako su nastale, tj. iz početka sile F_y ide zraka 1, a iz završetka 2.
- Nacrtati paralelu zrake 1 tako da reže crte ispod prvog oslonca i ispod sile. Zraku 2 nacrtati u sjecištu prve zrake i sile, do crte ispod drugog oslonca. Zaključnica spaja sjecište prve zrake i oslonca sa sjecištem zadnje

(druge) zrake i drugog oslonca. Paralelu na zaključnicu nacrtamo kroz točku P. Ona dijeli vertikalnu reakciju na 2 sile: F_A i F_{By} . Izmjeriti reakcije i preračuna $\mu_F = 2,3 \cdot 10 = 23kN$

$$F_{By} = l_{By} \cdot \mu_F = 1,2 \cdot 10 = 12kN$$

7. Nacrt se posebno poligon sila za vodoravne sile. (Prije smo dobili da je F_x na crtežu duga 2cm.) Budući da se javljaju samo dvije, moraju po 3. Newtonovom zakonu sile F_x i F_{Bx} biti iste, ali suprotnog smjera. $F_{Bx} = -20kN$. Vidi se da F_{Bx} ide uljevo (a ne kako smo pretpostavili, udesno).

8. Dobivenom dijagramu momenata savijanja odredi se predznak, izmjeri visina y, te izračuna najveći moment savijanja, koji djeluje u presjeku ispod sile F po izrazu: $M_f = y \cdot H \cdot \mu_F \cdot \mu_L$ $M_{fmax} = 1,15 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 1 = 46kNm$

9. Zatim se crta dijagram poprečnih sile D(Q). Nacrtamo nul-liniju, odn. os x. Na lijevom kraju nacrtamo silu F_A , pazeći na predznak, 2,3cm za gore. Do sile F_y ništa se ne mijenja, pa iz kraja sile F_A do F_y povučemo vodoravnu crtu. Nacrtamo F_y , (3,5 cm), od nje do F_{By} vodoravna crta. Zadnja sila, F_{By} , mora vratiti dijagram u nulu. Upisati predznače, iznad 0 je +, a ispod -.

10. Na kraju se nacrt dijagram uzdužnih sila D(N). Nacrtamo nul-liniju, odn. os x. Na mjestu gdje djeluje sila (2cm od lijevog kraja) nacrtamo F_x , za dolje jer je negativna (stiče taj dio grede), 2cm. Vodoravna crta do sljedeće vodoravne sile, a to je F_{Bx} na desnom kraju grede. Ona vraća u nulu! Upisati predznak, iznad 0 je +, a ispod -.

Teorija koju treba znati za ovaj zadatak:

Nosač je dio konstrukcije koji nosi teret, odnosno preuzima opterećenje. Opterećenja mogu biti sile i momenti.

Ima više vrsta nosača, no javit će se zadaci samo iz proste grede i konzole. **Greda** je vodoravni ili kosi nosač koji se oslanja na oba kraja. **Prosta (jednostavna) greda** je ona koja na jednom kraju ima pomični, a na drugom nepomični oslonac. **Konzola** je vodoravni ili kosi nosač oslonjen samo na jednom kraju, a drugi je slobodan.

Oslonac je mjesto na kojem je nosač pričvršćen za podlogu. Bitne su 3 vrste oslonaca: pomični, nepomični i uklještenje. Treba znati njihove simbole i zamijeniti njihovo djelovanje reakcijama veza.

1. POMIČNI



2. NEPOMIČNI



3. UKLJEŠTENJE



Grafički se zadatak rješava tako da se nacrt poligon vertikalnih sile i veržni poligon. (Ako treba, vidi objašnjenje kod zbrajanja paralelnih sile.) Cilj je u poligoni sile dobiti zaključnicu. Zaključnica je crta koja spaja sjecište prve zrake i okomite crte ispod prvog oslonca sa sjecištem zadnje zrake i okomite crte ispod drugog oslonca. Ona dijeli ukupnu reakciju na 2 dijela – silu u lijevom osloncu A i desnom B. Koja je F_A , a koja F_B ? Crte koje u planu sile čine trokut, u planu položaja sijeku se u istoj točci. Npr. gornja nepoznata sila reakcije u poligoni sile zatvara trokut sa zrakama 1 i z. Lijevo u planu položaja pogledamo gdje se sijeku 1 i z, te po uspravnoj liniji gore vidimo da je to sila F_A . Isto tako, donja nepoznata reakcija u poligoni sile zatvara trokut s crtama 2 i z, pa je to F_{By} . Zadnji korak kod grafičkog postupka uvijek je mjerjenje duljina i množenje s mjerilom da se dobiju prave veličine.

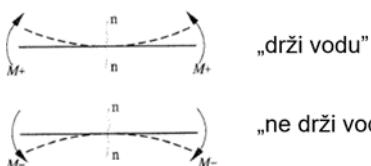
Dijagrami prikazuju ovisnost promatrane veličine o mjestu na nosaču. Vodoravna os (x) je mjesto na nosaču – lijevi kraj je $x = 0m$. Na okomitoj, odn. y osi, crta se veličina momenta savijanja, poprečnih odnosno uzdužnih sile. Pozitivne veličine se crtaju iznad, a negativne ispod x-osi. Iznimka je dijagram momenata savijanja, kod njega se crta obratno: pozitivni dole, negativni gore!

Određivanje predznaka dijagrama

Predznak momenta savijanja određuje se tako da gledamo kako se pod njegovim utjecajem savija nosač. Ako savijeni nosač „drži vodu”, odn. poprima oblik usta veselog smiley-a, pozitivan je, u suprotnom, ako „ne drži vodu” (tužni smajlić) je negativan. Dijagram momenata savijanja označava se $D(M_f)$, jer je engl. flexion = savijanje.

Predznak uzdužnih sile je pozitivan ako su vlačne, tj. djeluju u smjeru osi nosača prema van, a negativan ako su tlačne, dakle stišću nosač, tj. djeluju u smjeru osi prema unutra. Dijagram uzdužnih sile označava se $D(N)$.

Poprečne sile zakrenemo za 90° obrnuto od kazaljke na satu i zatim ih promatramo kao da su uzdužne. Dijagram poprečnih sile označava se $D(Q)$.



$$\text{Smiley face} = +M$$

$$\text{Frowny face} = -M$$



$$+F$$

$$-F$$

b) analitički postupak:

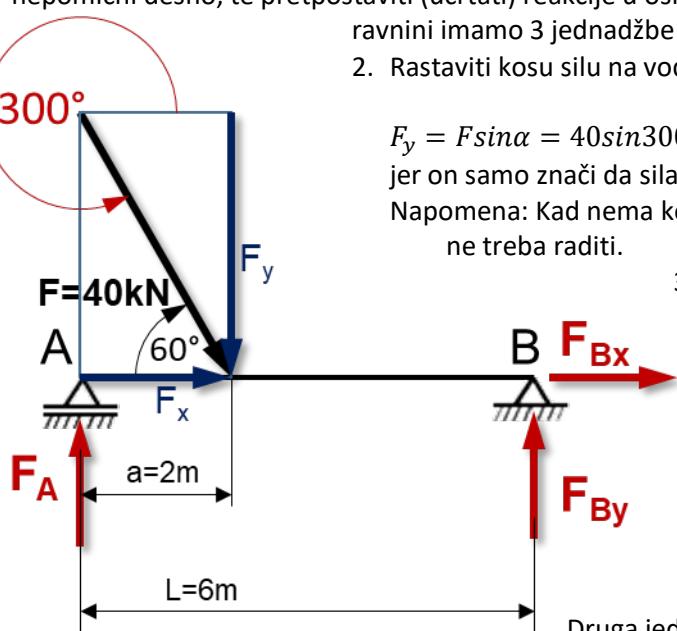
1. Početak je isti – Skicirati i kotirati nosač i zadatu silu. Prema tekstu zadatka, postaviti pomični oslonac lijevo, nepomični desno, te prepostaviti (ucrtati) reakcije u osloncima. One su nepoznanice, i smije ih biti najviše 3, jer u ravnini imamo 3 jednadžbe uvjeta ravnoteže: $\Sigma M = 0$, $\Sigma Y = 0$ i $\Sigma X = 0$.

2. Rastaviti kosu silu na vodoravnu i uspravnu komponentu pomoću formula:

$$F_x = F \cos \alpha = 40 \cos 300^\circ = 20 \text{ kN}$$

$F_y = F \sin \alpha = 40 \sin 300^\circ = -34,64 \text{ kN} \approx 35 \text{ kN}$ (ovdje predznak (-) zanemarimo, jer on samo znači da sila ide za dolje, tj. suprotno od osi y, koja raste za gore.)

Napomena: Kad nema kose sile (nego su samo vertikalne i vodoravne) ovo ne treba raditi.



3. Zatim se pišu jednadžbe uvjeta ravnoteže, te pomoću svake izračuna po jedna nepoznanica.

Prva je $\Sigma M = 0$. Gleda se skica nosača i upisuju s lijeva na desno svi momenti koji vrte oko točke A:

$$-F_y \cdot a + F_{By} \cdot L = 0 \quad \text{- nepoznanica je } F_{By}, \text{ pa se prebacivanjem dobiva:}$$

$$F_{By} = \frac{F_y \cdot a}{L} = \frac{35 \cdot 2}{6} = 11,67 \text{ kN}$$

Druga jednadžba ravnoteže: $\Sigma Y = 0$ opet se piše prema skici – idemo s

lijeva na desno i zbrajamo samo okomite sile (tj. koje idu u smjeru osi y). Sile suprotnog smjera dobiju predznak -.

$$F_A - F_y + F_{By} = 0 \quad \text{- nepoznanica je } F_A, \text{ pa se prebacivanjem opet dobiva:}$$

$$F_A = F_y - F_{By} = 35 - 11,67 = 23,33 \text{ kN}$$

Treća jednadžba ravnoteže: $\Sigma X = 0$, opet se piše prema skici – idemo s lijeva na desno i zbrajamo samo vodoravne sile (tj. koje idu u smjeru osi x).

$$F_x + F_{Bx} = 0$$

$$F_{Bx} = -F_x = -20 \text{ kN}$$

Predznak (-) znači da smo krivo prepostavili smjer sile F_{Bx} , tj. ona ne ide udesno, nego u lijevo!

Budući da je ovaj nosač opterećen samo jednom vanjskom silom, najveći moment savijanja javlja se u presjeku ispod sile: $M_{fmax} = F_A \cdot a = 23,33 \cdot 2 = 46,66 \text{ kNm}$.

Teorija koju treba znati za ovaj zadatak:

Analitički se zadatak rješava pomoću jednadžbi uvjeta ravnoteže. U ravnini ih ima 3: $\Sigma M = 0$, $\Sigma Y = 0$ i $\Sigma X = 0$.

Uvjet ravnoteže glasi: Tijelo je u ravnoteži ako je zbroj svih sila koje djeluju na njega jednak nuli, i zbroj svih momenata koji djeluju na tijelo također jednak nuli.

Sve 3 jednadžbe pišu se pomoću crteža (skice) nosača. Gleda se crtež i upisuju s lijeva na desno svi dijelovi koje treba zbrojiti (kod $\Sigma M = 0$ zbrajaju se momenti koji vrte oko točke A, kod $\Sigma Y = 0$ zbrajaju se samo okomite sile, a kod $\Sigma X = 0$ samo vodoravne sile). Ako crtež nije dobar, ne možemo točno napisati te formule niti riješiti zadatak! Zadatak zadan tekstom treba „prevesti“ u skicu na početku rješavanja zadatka, a za to treba znati teoriju koja se ovdje ponavlja:

Prosta (jednostavna) greda je ona koja na jednom kraju ima pomični, a na drugom nepomični oslonac. **Konzola** je vodoravni ili kosi nosač oslonjen samo na jednom kraju, a drugi je slobodan. **Oslonac** je mjesto na kojem je nosač pričvršćen za podlogu. Bitne su 3 vrste oslonaca: pomični, nepomični i uklještenje. Treba znati njihove simbole i zamijeniti njihovo djelovanje reakcijama veza.



1. POMIČNI



2. NEPOMIČNI



3. UKLJEŠTENJE

Kad pišemo jednadžbe, iako Σ znači „zbroj“, tj. rezultat zbrajanja, u jednadžbi neće uvijek biti +, nego se javlja - kada ono što zbrajamo ima suprotan smjer. U mehanici predznak – znači suprotan smjer. Npr. ako moment koji vrti obrnuto od kazaljke na satu označimo (+), onda će moment koji vrti u smjeru kazaljke na satu biti (-). Kad zbrajamo sile, ako silu koja ide za gore označimo (+), ona koja ide za dolje je (-). (Može se odabrat i obratno, i formula će biti točna ako dosljedno pazimo da dijelovi (pribrojnici) koji idu u istom smjeru imaju isti predznak, a oni koji idu u suprotnom – suprotni!)

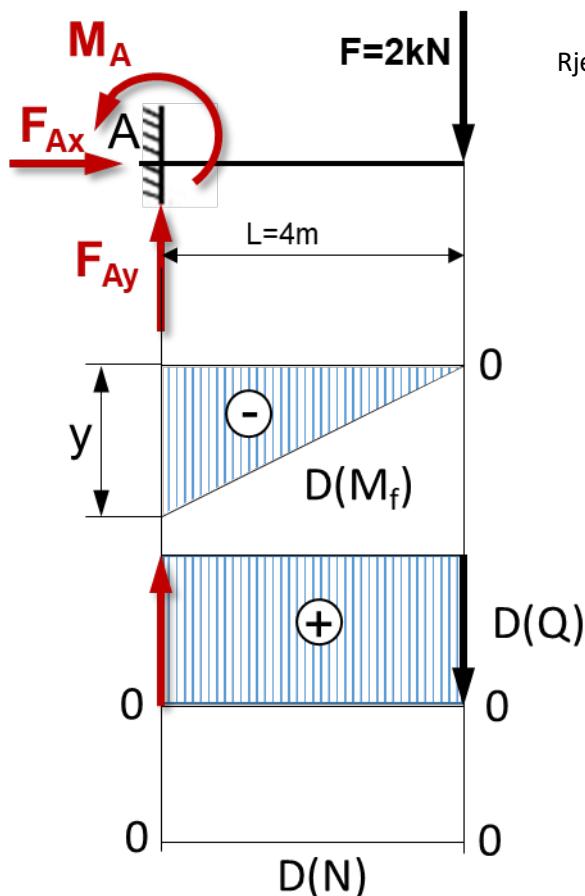
Napomena: Dijagrami unutrašnjih veličina mogu se nacrtati i nakon analitičkog izračunavanja reakcija i momenta savijanja. U svakom dijagramu crtaju se izračunate veličine u odabranom mjerilu za karakteristična mesta – oslonce i presjek ispod sile, odn. kad je u zadatku zadano više sile, onda ispod svake sile. Nanose se kao okomite udaljenosti od 0 – linije (x – osi), odn. visine u odnosu na nulu.

2. Konzola dužine $L=4m$ opterećena je silom $F=2kN$ na slobodnom kraju. Grafički rješi nosač.

$$\text{Mjerila su } \mu_F = \frac{1kN}{1cm}, \mu_L = \frac{1m}{1cm}.$$

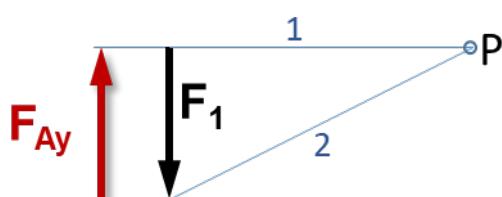
Zadano: konzola, $L=4m$, $F=2kN$

Traži se: $F_{Ax}=?$, $F_{Ay}=?$, $M_A=?$, $D(M_f)$, $D(Q)$, $D(N)$



Rješenje:

1. Nacrtati u mjerilu nosač i zadalu silu,
2. Ucrati pretpostavljene reakcije u osloncima, označiti ih,
3. Ispod oslonaca i sila spustiti tanke pomoćne crte za budući verižni poligon,
4. Desno nacrtati poligon sile. Označiti pol P i spojiti s njime početak i završetak sile iz poligona. Tako dobivene zrake označiti brojevima redom kako su nastale.



5. Nacrtati verižni poligon. Prenijeti paralelu na zraku 1 tako da reže crtu ispod prvog oslonca i prve sile. Zraku 2 nacrtati u sjecištu prve zrake i sile itd. Zadnja zraka (u ovom zadatku druga) siječe crtu ispod oslonca (kod konzole postoji samo jedan oslonac, pa se ta zraka vuče nazad, tj. ulijevo). Zaključnice nema. Svu vertikalnu silu preuzima oslonac silom F_Ay. Budući da nema vodoravnih sila, $F_{Ax}=0$, ukupna sila $F_A=F_{Ay}$.

6. Izmjeriti reakcije i pomoću mjerila preračunati u N. Ovdje to nije ni potrebno, jer možemo direktno primijeniti 3. Newtonov zakon: sila reakcije F_{Ay} jednaka je sili akcije F , samo je suprotnog smjera. Dakle, $F_{Ay}=2kN$
7. Verižni poligon dobiven u planu položaja ujedno je dijagram momenata savijanja. Moment je negativan jer se nosač savija tako da ne drži vodu. Mjeri se visina y ispod oslonca jer je tu M_f očito najveći, i izračuna max. Moment savijanja. $M_f = y \cdot H \cdot \mu_F \cdot \mu_L$, $M_{fmax} = M_A = 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = 8kNm$
8. Zatim se nacrtava dijagram poprečnih sila $D(Q)$. Nacrtamo nul-liniju, odn. os x. Na lijevom kraju nacrtamo silu F_A , pazeći na predznak, 2cm za gore. Do sile F ništa se ne mijenja, pa iz kraja sile F_A do F povučemo vodoravnu crtu. Nacrtamo F na kraju konzole. Ona vraća dijagram poprečnih sila $D(Q)$ u nulu, kako i treba.
9. Vodoravnih, odn. uzdužnih sila nema, pa je $D(N)$ ustvari 0-linija.

3. Valjak mase 150kg gura se po vodoravnoj zemlji. Ako je faktor trenja klizanja 0,18, a kotrljanja 0,02, kolika je sila potrebna za pokretanje valjka? a) u smjeru osi? b) okomito na os? Rješenje:

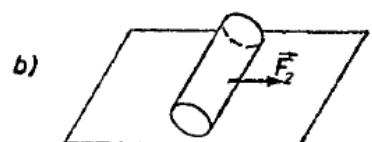
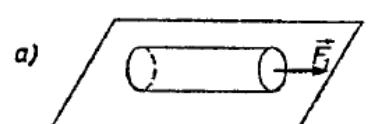
Skicira se na papiru valjak i podloga za oba slučaja da se vidi o čemu se radi: Dakle, kad se povlači u smjeru osi, valjak kliže, a u drugom slučaju se kotrlja.

Zato je za a) $F_{tr} = \mu \cdot F_N = 0,18 \cdot 1500 = 270N$,

A za slučaj b) $F_{tr} = \mu \cdot F_N = 0,02 \cdot 1500 = 30N$

U oba slučaja je normalna sila pritiska jednaka težini valjka,

$$F_N = G = m \cdot g = 150 \cdot 10 = 1500N$$

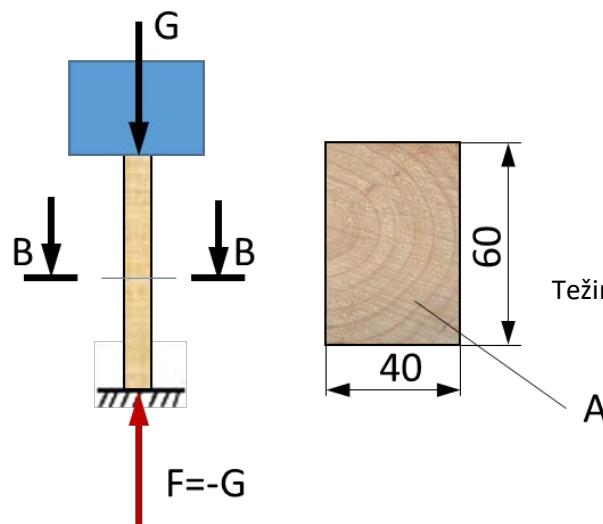


5. dio: (nauka o čvrstoći)

1. Izračunaj naprezanje u štalu pravokutnog poprečnog presjeka 40x60mm ako na njemu stoji teret mase 3t.

Zadano: $a=40\text{mm}$, $b=60\text{mm}$,

$$m=3t=3 \cdot 1000=3000\text{kg}$$



Traži se: $\sigma = ?$

Rješenje:

Štap je napregnut na tlak, jer odozgo na njega djeluje težina tereta G , a odozdo reakcija podloge F .

$$\text{Težina } G=m \cdot g=3000 \cdot 10=30000\text{N}=30\text{kN}.$$

Površina presjeka štapa je površina pravokutnika:

$$A=a \cdot b=40 \cdot 60=2400\text{mm}^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Naprezanje u štalu je: } \sigma &= \frac{F}{A} \\ \sigma &= \frac{30000}{2400} = 12,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 12,5\text{MPa} \end{aligned}$$

2. Izračunaj potreban promjer čeličnog užeta ako je opterećeno silom $F= 30\text{kN}$ a dopušteno naprezanje na vlak iznosi $\sigma_d= 250\text{MPa}$.

Zadano: $F=30\text{kN}=30000\text{N}$,

$$\sigma_d= 250\text{MPa}$$

Traži se: $d = ?$

Rješenje:

Da bi uže izdržalo opterećenje, mora zadovoljiti uvjet čvrstoće: $\sigma \leq \sigma_d$, tj. stvarno naprezanje užeta mora biti manje od dopuštenog. Uže može biti napregnuto samo na vlak (kad ga pokušamo tlačiti, odmah se savije). Veličina naprezanja se računa po formuli koja proizlazi iz definicije naprezanja (to je sila podijeljena s površinom):

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma_d = 250\text{MPa}$$

$$\text{Potrebna površina presjeka užeta je: } A \geq \frac{F}{\sigma_d} = \frac{30000}{250} = 120\text{mm}^2$$

Zadatak ne pita kolika je površina užeta, nego koliki je njegov promjer.

Presjek užeta ima približno oblik kruga, pa je njegova površina: $A = \frac{d^2 \pi}{4}$. Rješavanjem ove jednadžbe za nepoznanicu d , odn. množenjem cijele jednadžbe s 4, dijeljenjem sa π te korjenovanjem, dobije se:

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 120}{\pi}} = 12,36\text{mm}$$

Znači treba uzeti prvi veći cijeli broj, odn. uže promjera $d=13\text{mm}$.

Teorija koju treba znati za ovaj zadatak:

Opterećenje na tijelo može biti **sila i/ili moment**.

Deformacija je promjena oblika koja nastaje djelovanjem opterećenja. Može biti **elastična i plastična**.

Naprezanje je unutrašnja sila kojom se tijelo odupire promjeni oblika razdijeljena na površinu poprečnog presjeka. $\sigma = \frac{F}{A}$.

Čvrstoća je svojstvo materijala da može izdržati određeno naprezanje a da ne pukne, niti se trajno deformira.

Uvjet čvrstoće glasi: **stvarno naprezanje** mora biti **manje ili jednako od dopuštenog**. $\sigma \leq \sigma_d$

Dopušteno naprezanje uvijek je u području elastičnosti materijala. Dobiva se eksperimentalno, ispitivajem materijala na kidalici. U zadatku će biti zadano, npr. $\sigma_d = 300\text{MPa}$, ili neki drugi broj.

3. Koliko će se produžiti čelična žica promjera 2,5mm početne dužine L=5m, ako se nategne silom F=2kN?

Zadano: F=2kN=2000N,

d= 2,5mm

L=5m

E=210GPa=210000MPa

Traži se: $\Delta L = ?$

Rješenje: $\Delta L = \frac{F \cdot L}{A \cdot E}$ - za ovu formulu nedostaje nam samo površina poprečnog presjeka žice A.

Presjek žice je krug, pa vrijedi formula za površinu kruga: $A = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{2,5^2 \cdot \pi}{4} = \frac{25}{16} \pi = 4,909 \text{ mm}^2$

Sada uvrstimo sve brojeve: $\Delta L = \frac{F \cdot L}{A \cdot E} = \frac{2000 \cdot 5}{4,909 \cdot 210000} = 9,7 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 9,7 \text{ mm}$, dakle žica će se produžiti za skoro 1cm.

Teorija koju treba znati za ovaj zadatak:

Opterećenje na tijelo može biti **sila i/ili moment**.

Deformacija je promjena oblika koja nastaje djelovanjem opterećenja. Može biti **elastična i plastična**.

Narezanje je unutrašnja sila kojom se tijelo odupire promjeni oblika razdijeljena na površinu poprečnog presjeka. $\sigma = \frac{F}{A}$.

U području elastičnosti vrijedi **Hooke-ov zakon**, koji glasi: naprezanje i deformacija su proporcionalni. $\sigma = E \cdot \epsilon$

Gdje je E= Youngov modul elastičnosti, a ϵ je **relativna deformacija**, tj. omjer stvarne deformacije i početne duljine. $\epsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{L_1 - L}{L}$ Za čelik E=210GPa

Stvarna deformacija je razlika duljine opterećenog i neopterećenog dijela. $\Delta L = L_1 - L$ – dobiva se mjeranjem, ili se može izračunati (predvidjeti) pomoću drugog oblika Hooke-ovog zakona, odr. po formuli: $\Delta L = \frac{F \cdot L}{A \cdot E}$